Die Salmonschen Formeln

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Martin Luther-Universität

Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Albrecht Hoppe

aus Halle-Saale

Halle-Saale

Großbetrieb für Dissertationsdruck von Robert Noske in Borna-Leipzig

1936

Referent: Professor Dr. H. W. E. Jung.
Korreferent: Professor Dr. Brandt.

Tag der mündlichen Prüfung: 17. April 1935.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

HERRN PROFESSOR

DR. HEINRICH W. E. JUNG

IN DANKBARKEIT UND VEREHRUNG

GEWIDMET

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

I. Kapitel. Der Einfluß von Singularitäten auf die Ordnung a und die Klasse n' eines Berührungskegels 2

§ 1. Die Fläche F mit einem Kniffpunkt 2

§ 2. Die Fläche F mit einem clos-Punkt 5

§ 3. Die Fläche F mit einem biplanaren Punkt 8

II. Kapitel. Die Fläche F mit einem konischen Punkt 12

§ 1. Die Stellen 12

§ 2. Die Primteiler 15

§ 3. Die Divisoren A_i und $\mathfrak{R}$ 16

§ 4. Der Divisor $\mathfrak{D}_0$ 16

§ 5. Schnittpunktzahlen 17

§ 6. Formeln 18

III. Kapitel. Das arithmetische Geschlecht 22

§ 1. Der Kniffpunkt 22

§ 2. Der clos-Punkt 25

Schluß 27

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544704_0064

Einleitung.

Im folgenden sollen für einige Flächen mit besonderen Singularitäten mit den Methoden der algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen i. b. der von H. W. E. JUNG entwickelten Theorie der algebraischen Flächen die sog. SALMONschen Formeln hergeleitet werden. Während diese ursprünglich mit Methoden der analytischen Geometrie bewiesen waren, soll hier gezeigt werden, wie man sich dieselben Formeln von Fall zu Fall herleiten kann, ohne wie im ersten Fall ein besonders hohes räumliches Vorstellungsvermögen voraussetzen zu müssen. Dabei gehen wir aus von den mit Hilfe der Invarianten der Flächen aufgestellten Äquivalenzen (Lit.-Verz. Nr. 2, II. Kap. § 21), aus denen sich durch Zusammensetzen mit passend gewählten Kurven SALMONsche Formeln herleiten lassen werden.

Schließlich werden wir noch die Berechnung des arithmetischen Geschlechts mit Hilfe eines linearen Differentials behandeln.

I. Kapitel.

Der Einfluß von Singularitäten auf die Ordnung a und die Klasse n' eines Berührungskegels.

Wir legen den singulären Punkt in den Ursprung des Koordinatensystems oder bei Wahl homogener Koordinaten in eine der Ecken 1 oder 4 des Koordinatentetraeders. Es interessieren uns die Größen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') = a$ und $(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}') = n'$ in Abhängigkeit von den Singularitäten, wobei wir die ebenen Schnitte $\mathfrak{A}$ und Berührungskurven $\mathfrak{A}'$ speziell wählen. Durch den singulären Punkt wird bewirkt, daß die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ Primfaktoren absondern. Lassen wir diese fort, so möge $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ übergehen in $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{A}}'$, und die Zahlen $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{A}}') = \bar{a}$ und $(\overline{\mathfrak{A}}', \overline{\mathfrak{A}}') = \bar{n}'$ gilt es zu bestimmen.

§ 1.

Die Fläche F mit einem Kniffpunkt.

Wir nehmen als Beispiel einer derartigen Fläche

$$z = (y - x^2)\left(1 + \sqrt{x}\right) + (y - x^2)^2$$

oder rational gemacht:

$$F(x, y, z) \equiv \left\{z - (y - x^2) - (y - x^2)^2\right\}^2 - x\,(y - x^2)^2$$

Es existieren zwei Gerade, die die Fläche in 4 zusammenfallenden Punkten schneiden:

1. $y = z = 0$ als Gleichung der Tangente an die Doppelkurve, deren Projektion auf die xy-Ebene die Gleichung $y - x^2 = 0$ hat, im Kniffpunkt. Denn dann lauten die Anfangsglieder $F \equiv x^4 + (5)$. Wir verstehen im folgenden unter einer solchen eingeklammerten Zahl immer, daß die folgenden Glieder von mindestens der durch die Zahl angegebenen Dimension sind. Andererseits soll z. B. (x) bedeuten, daß alle folgenden Glieder den Faktor x haben.

2. $y-z=0$, $x=0$, denn dann geht F über in $F\equiv y^4$. Diese Gerade heiße die singuläre Tangente. Die Ebene durch diese beiden Geraden nennen wir die singuläre Ebene. Ihre Gleichung ist demnach $y-z=0$.

Um x, y, z in der Umgebung des Nullpunktes durch Hilfsgrößen u, v darzustellen, setzen wir zunächst:

$$x=u^2,\ y=u^4+v,\ \text{daraus}\ z=(1+u)v+v^2.$$

Aus
$$x:y:z:1=A_1:A_2:A_3:A_4$$
bestimmen wir im folgenden die Größen $\mathfrak{A}_i'$ immer aus folgender Aufstellung:

A_i:	u^2	u^4+v	$(1+u)v+v^2$	1
$\frac{\partial A_i}{\partial u}$:	$2u$	$4u^3$	v	0
$\frac{\partial A_i}{\partial v}$:	0	1	$(1+u)+2v$	0

Es ergibt sich die Größe A_i' aus der Determinante 3. Ordnung, die sich aus dieser Aufstellung ergibt, wenn man die i-te Spalte fortläßt. Der gemeinsame Faktor ist R. Daraus ergibt sich (in allen Fällen $i=1,\ldots 4$):

$$A_i':\ -v+4u^3+(4);\ -2u+(2);\ 2u;\ u^2v+\ldots,\ R=1.$$

Die gemeinsame Nullstelle $u=0$, $v=0$ wird aufgelöst durch die Transformation:

$$\mathrm{I}_1:\ u=u_1,\ v=u_1v_1;\ \mathrm{I}_2:\ u=u_1v_1,\ v=u_1.$$

Das ergibt:

$$\mathrm{I}_1:\ \mathfrak{A}_i':\ v_1+(2),\ 2+(u_1),\ -2,\ -2u_1^2v_1+(4),\ R=-u_1^2,$$
$$\mathrm{I}_2:\ \mathfrak{A}_i':\ 1+(u_1v_1),\ 2v_1+(u_1v_1),\ -2v_1,\ (u_1v_1),\ R=u_1^2.$$

Den auftretenden Primteiler bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}$. Seine zugeordnete Funktion ist in beiden Fällen u_1.

Die Schnittpunktzahlen: Für $\mathfrak{B}=0$ folgt 1. $A_i=0$, $i=1,\ldots 3$, d. h. $\mathfrak{B}$ definiert eine in einen Punkt kondensierte Kurve, eine „Punktkurve“; 2. bei

$$\mathrm{I}_1:\ \mathfrak{A}_i':\ v,\ 2,\ -2,\ 0,$$
$$\mathrm{I}_2:\ \mathfrak{A}_i':\ 1,\ 2v,\ -2v,\ 0.$$

Daraus folgt:
$$(\mathfrak{A}', \mathfrak{B})=1.$$

Um $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ zu bestimmen, betrachten wir die Zerlegung von $x_1 = \mathfrak{A}_1$, die wir so darstellen:

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{B}^2 \mathfrak{L}_0' ,$$

wobei $\mathfrak{L}_0$ den Zählerdivisor bezeichnet.

Es ist bei I_1 $\mathfrak{L}_0'$ eine Einheit, bei I_2: $\mathfrak{L}_0' = v_1^2$, also $(\mathfrak{B}, \mathfrak{L}_0') = 2$. $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{B}^2 \mathfrak{L}_0'$ zusammengesetzt ergibt somit $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}) = -1$.

Zusammengefaßt:

[1] $$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 0, \quad (\mathfrak{A}', \mathfrak{B}) = 1, \quad (\mathfrak{B}, \mathfrak{B}) = -1 .$$

Formeln:

1°. Der Berührungskegel an die Fläche mit der Spitze im Kniffpunkt $(0, 0, 0, 1)$ hat die Gleichung $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}_4' = 0$; und da $\mathfrak{A}_4$ den Primfaktor $\mathfrak{B}^2$ hat, so folgt:

[2] $$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}^2 \overline{\mathfrak{A}}' .$$

Eine Ebene durch den Kniffpunkt hat die Gleichung:

$$\mathfrak{A} \equiv \lambda_1 \mathfrak{A}_1 + \lambda_2 \mathfrak{A}_2 + \lambda_3 \mathfrak{A}_3 = 0 .$$

Die Summe rechts enthält den Primfaktor $\mathfrak{B}$, also

[3] $$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \overline{\mathfrak{A}} .$$

Aus [2] und [3] folgt

$$\bar{a} = (\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{A}}') = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}, \mathfrak{A}'\mathfrak{B}^{-2})$$

und daraus mit [1]

$$\bar{a} = a - 3 ,$$

d. h. die Klasse des ebenen Schnittes oder die Ordnung des Berührungskegels wird in diesem Fall um 3 Einheiten verringert.

2°. Die Klasse $\bar{n}'$ ergibt sich, wenn wir [2] mit einer beliebigen Berührungskurve $\mathfrak{A}'$ zusammensetzen:

$$\bar{n}' = (\mathfrak{A}', \overline{\mathfrak{A}}') = (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'\mathfrak{B}^{-2}) = n' - 2$$

3°. Für einen Punkt auf der singulären Tangente $y = z$, $x = 0$ gilt: $x_1 = 0$, $x_2 = x_3$, x_4 beliebig. Ein Kegel mit der Spitze in einem solchen Punkt T $(0, a_2, a_2, a_4)$ ist gegeben durch:

$$\mathfrak{A}' \equiv a_2 \mathfrak{A}_2' + a_2 \mathfrak{A}_3' + a_4 \mathfrak{A}_4' = 0 .$$

$\mathfrak{A}'$ enthält $\mathfrak{B}$, also:

[4] $$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B} \overline{\mathfrak{A}}' .$$

Für eine Ebene durch T: $\mathfrak{A} \equiv \lambda_1 \mathfrak{A}_1 + \lambda_2 \mathfrak{A}_2 + \lambda_3 \mathfrak{A}_3 + \lambda_4 \mathfrak{A}_4 = 0$, mit $\alpha_2 (\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_4 \alpha_4 = 0$, gilt in Verbindung mit [4]

$$\bar{a} = (\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{A}'}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \mathfrak{B}^{-1}) = a .$$

4^0. [4] mit einer beliebigen Berührungskurve $\mathfrak{A}'$ zusammengesetzt, ergibt:

$$\overline{n'} = (\mathfrak{A}', \overline{\mathfrak{A}'}) = (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}' \mathfrak{B}^{-1}) = n' - (\mathfrak{A}', \mathfrak{B}) = n' - 1 .$$

§ 2.

Die Fläche F mit einem clos-Punkt.

Eine Fläche mit einem clos-Punkt ist z. B.

$$z = x^3 + 2x(y - x^2) + (y - x^2)^2 + \sqrt{x}\left(\sqrt{y - x^2}\right)^3 ,$$

folglich rational gemacht:

$$F \equiv \left\{z - 2x(y - x^2) - (y - x^2)^2 - x^3\right\}^2 - x(y - x^2)^3 = 0 ,$$

wobei $y - x^2 = 0$ die Projektion der Rückkehrkurve auf die xy-Ebene ist. In Parameterdarstellung:

$$x = \varrho, \quad y = \varrho^2 + \sigma, \quad \text{daraus,} \quad z = \varrho^3 + 2\varrho\sigma + \sigma^2 + \varrho^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{3}{2}} .$$

Für homogene Koordinaten:

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = 1 : x : y : z$$

wird

$$A_i : 1, \varrho, \varrho^2 + \sigma, \varrho^3 + 2\varrho\sigma + \sigma^2 + \varrho^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{3}{2}} .$$

Wir nehmen die Transformation:

$$\text{I}: \quad \varrho = \lambda, \quad \sigma = \lambda \mu^2, \quad \lambda = u, \quad \mu = v .$$

Dann wird:

$$A_i : 1, \; u, \; u^2 + uv^2, \; u^3 + 2u^2 v^2 + u^2 v^3 + u^2 v^4,$$

woraus sich ergibt:

$$A_i' : (uv), \; -2u^2 + (uv), \; 4u + (uv), \; -2, \; R = uv.$$

$$\text{II}: \; \varrho = \lambda \mu^2, \; \sigma = \lambda ; \; \text{II}_1 : \; \lambda = u, \; \mu = uv ; \; \text{II}_2 : \; \lambda = uv, \; \mu = u .$$

$$\text{II}_1 : \; A_i : \; 1, \; u^3 v^2, \; u + u^6 v^4, \; u^2 + u^3 v + 2u^4 v^2 + u^9 v^6 ,$$

$$\mathfrak{A}_i' : \; (uv), \; -1 + (uv), (uv), 2v ; \; \mathfrak{R} = u^3 .$$

$$\text{II}_2\colon\ A_i\colon\ 1,\ u^3 v,\ u v + u^6 v^2,\ u^2 v^2 + u^5 v^2 + 2 u^4 v^2 + u^9 v^3,$$
$$\mathfrak{A}_i'\colon\ (u^2 v^2),\ -v + (u v),\ -4 u^3 + (u v),\ 2;\ \mathfrak{R} = -u^3 v,$$
$$i = 1, \ldots 4.$$

Die Primteiler:

1^0. $\mathfrak{B}_1$ mit der zugeordneten Funktion u bei I und v bei II_2. Für $\mathfrak{B}_1 = 0$ wird an beiden Stellen:

$$A_i = 0,\ i = 2, \ldots 4,\ \mathfrak{A}_i' = 0,\ i = 1, \ldots 3.$$

$\mathfrak{B}_1 = 0$ definiert eine Punkt- und Ebenenkurve in der Ebene $x_4 = z = 0$.

2^0. $\mathfrak{B}_2$ mit der zugeordneten Funktion u bei II_1 und II_2. Für $\mathfrak{B}_2 = 0$ wird $A_i = 0$, $i = 2, \ldots 4$. $\mathfrak{B}_2$ ist also eine Punktkurve. Die $\mathfrak{A}_i'$ werden nicht sämtlich null. Die Berührungsebenen in den einzelnen Stellen von $\mathfrak{B}_2$ sind also voneinander verschieden; sie müssen aber alle durch den Punkt $\mathfrak{B}_2$ gehen, folglich bilden sie einen Kegel, der hier in eine sog. Gerade 2. Art degeneriert ist. Für $\mathfrak{B}_2 = 0$ wird nämlich bei

$$\text{II}_1\colon\ \mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_3' = 0;\ \mathfrak{A}_2' = -1,\ \mathfrak{A}_4' = 2v,$$
$$\text{II}_2\colon\ \mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_3' = 0;\ \mathfrak{A}_2' = -v,\ \mathfrak{A}_4' = 2,$$

d. h. $x_1' = x_3' = 0$ oder $x_2 = x_4 = 0$ definiert die Gerade $x = z = 0$ als Achse der Berührungsebenen im clos-Punkt, die wir die singuläre Tangente nennen wollen.

3^0. Der Primteiler $\mathfrak{P}$ bei I mit der zugeordneten Funktion v definiert die eigentliche Rückkehrkurve. Für $\mathfrak{P} = 0$ wird $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$ mit der Tangente $y = 0$, $z = 0$ und der Schmiegungsebene $z = 0$ im clos-Punkt. Diese Ebene, in der die singuläre Tangente und die Tangente an die Rückkehrkurve liegt, wollen wir die singuläre Ebene nennen.

Die Schnittpunktzahlen:

1^0. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, 2$, da die $\mathfrak{B}_\alpha$ Punktkurven definieren.

2^0. $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_1) = 0$, da $\mathfrak{B}_1$ eine Punkt- und Ebenenkurve definiert.

3^0. $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_2) = 1$, da $\mathfrak{B}_2$ einen in eine Gerade degenerierten Berührungskegel ergab.

4^0. $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = 1$, denn beide Kurven treffen sich bei II_2.

5^0. $(\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$. Wir gehen aus von $\mathfrak{A}_2$ und setzen $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{L}_0$, wobei $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2^2 \mathfrak{L}_0'$ den Zählerdivisor von x darstellt. An den Stellen I und II_2 ist $\mathfrak{L}_0'$ eine Einheit, also $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{L}_0') = 0$; bei II_1 ist $\mathfrak{L}_0' = v^2$, also $(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{L}_0') = 2$. Wir setzen jetzt $\mathfrak{L}_0$ nacheinander mit $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ zusammen, unter Beachtung von $(\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{L}_0) \equiv (\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{A}) = 0$, dann wird $(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1) = -3$, $(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_2) = -1$.

Zusammengefaßt:

	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}'$	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}_2$
$\mathfrak{B}_1$	0	0	-3	1
$\mathfrak{B}_2$	0	1	1	-1

Wo sich Zeile und Spalte treffen, steht die betreffende Schnittpunktzahl der beiden Kurven.

Formeln:

1°. Ein Berührungskegel mit der Spitze in einem Punkt $P\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0)$ der singulären Ebene $x_4 = 0$ hat die Gleichung $\mathfrak{A}' \equiv \alpha_1 \mathfrak{A}_1' + \alpha_2 \mathfrak{A}_2' + \alpha_3 \mathfrak{A}_3' = 0$. Rechts ist $\mathfrak{B}$ enthalten, also

[1] $$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{A}}'$$

Eine Ebene durch die Gerade PK, wobei $K\ (1, 0, 0, 0)$ den clos-Punkt darstellt, hat die Gleichung:

$$\mathfrak{A} \equiv \lambda_2 \mathfrak{A}_2 + \lambda_3 \mathfrak{A}_3 + \lambda_4 \mathfrak{A}_4 = 0, \text{ mit } \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3 = 0,$$

woraus sich rechts $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ abspalten läßt:

[2] $$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \overline{\mathfrak{A}}.$$

Aus [1] und [2] und den Schnittpunktzahlen folgt

$$\bar{a} = (\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{A}}') = a - 3.$$

Ist im besonderen die singuläre Ebene $x_4 = \mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1^2 \mathfrak{B}_2^2 \overline{\mathfrak{A}}$ Schnittebene, so ist

$$\bar{a} = a - 6.$$

2°. Der Berührungskegel mit der Spitze im clos-Punkt hat die Gleichung

[3] $$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_1' = \mathfrak{B}_1^2 \mathfrak{B}_2^2 \overline{\mathfrak{A}}'.$$

Um die Ordnung $\overline{n}'$ dieses Kegels zu bestimmen, schneiden wir ihn mit einer beliebigen Ebene durch K, deren Gleichung demnach lautet:

$$\mathfrak{A} = \lambda_2 \mathfrak{A}_2 + \lambda_3 \mathfrak{A}_3 + \lambda_4 \mathfrak{A}_4 = 0,$$

woraus sich $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ absondern läßt, so daß

[4] $$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \overline{\mathfrak{A}}.$$

Also wird

$$\bar{a} = (\mathfrak{A} \mathfrak{B}_1^{-1} \mathfrak{B}_2^{-1},\ \mathfrak{A}' \mathfrak{B}_1^{-2} \mathfrak{B}_2^{-2}) = a - 5.$$

Durch Zusammensetzen von [3] mit einem beliebigen Berührungskegel $\mathfrak{A}'$ folgt die Klasse

$$\bar{n}' = (\mathfrak{A}', \overline{\mathfrak{A}}') = n' - 2 .$$

3°. Die Gleichung eines Berührungskegels mit der Spitze in einem beliebigen Punkt T $(a_1, 0, a_3, 0)$ der singulären Tangente $x_2 = x_4 = 0$ hat die Gleichung $\mathfrak{A}' \equiv a_1 \mathfrak{A}_1' + a_3 \mathfrak{A}_3' = 0$, wobei rechts $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ enthalten ist, $\mathfrak{A}'$ also die Gestalt hat:

[5] $$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \overline{\mathfrak{A}}' .$$

Die Ordnung und Klasse dieses Kegels folgen durch Zusammensetzen mit einer beliebigen Ebene $\mathfrak{A}$ durch T:

$$\bar{a} = (\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{A}}') = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \mathfrak{B}_1^{-1} \mathfrak{B}_2^{-2}) = a ,$$

und mit einer beliebigen Berührungskurve $\mathfrak{A}'$

$$\overline{n}' = (\mathfrak{A}', \overline{\mathfrak{A}}') = (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}' \mathfrak{B}_1^{-1} \mathfrak{B}_2^{-1}) = n' - 1 .$$

§ 3.

Die Fläche F mit einem biplanaren Punkt.

Hat eine Fläche einen mehrfachen Punkt, so läßt sich ihre Gleichung darstellen in der Form:

[1] $$F\ (x, y, z) \equiv f_\mu + f_{\mu+1} + \cdots ,$$

wobei die f_i homogene, ganze rationale Funktionen i-ten Grades in x, y, z sind. In der Umgebung des Nullpunktes ist F annähernd gegeben durch

[2] $$f_\mu (x, y, z) = 0 .$$

Das ist für $\mu = 1$ die Gleichung der Berührungsebene, für $\mu > 1$ die Gleichung des Berührungskegels. Zerfällt [2] in Linearfaktoren, so hat F im Nullpunkt mehrere Berührungsebenen.

Wir wählen einen biplanaren Punkt, also $\mu = 2$, und der Berührungskegel zerfällt in zwei Ebenen, deren Gleichungen seien $y + x = 0$ und $y - x = 0$, so daß [2] die Gestalt hat:

$$y^2 - x^2 = 0$$

und damit

[1] $$F \equiv y^2 - x^2 + f_3 + \cdots = 0 .$$

Die Schnittgerade beider Ebenen, die z-Achse, nennen wir die „singuläre Tangente".

Auf F wenden wir die quadratische Transformation:

$$\text{I. } x = z\xi,\ y = z\eta$$

an. Dadurch geht F über in eine Fläche Φ:

$$\Phi(\xi, \eta, z) \equiv \eta^2 - \xi^2 + z\{\varphi(\xi, \eta) + \cdots\} = 0.$$

Der singuläre Nullpunkt ist somit abgebildet auf die Umgebung der Kurve:

$$[3] \qquad \eta^2 - \xi^2 = 0,\ z = 0,$$

die in die beiden Geraden $\eta + \xi = 0$ und $\eta - \xi = 0$ zerfällt.

1^0. Wir betrachten den Nullpunkt, also den Schnittpunkt dieser Geraden. Setzen wir:

$$\xi = u + v,\ \eta = u - v,\ \text{also } \eta^2 - \xi^2 = -4uv,$$

so wird z eine Potenzreihe von u, v von der Form:

$$z = uv \cdot E(u, v),$$

wobei E eine Einheit ist, und damit

$$\text{I}_1\ x = uv(u+v)E(u,v),\ y = uv(u-v)E(u,v),\ z = uvE(u,v).$$

2^0. (ξ_0, η_0) sei ein endliches von (0,0) verschiedenes Wertepaar von (ξ, η), für das $\eta_0{}^2 - \xi_0{}^2 = 0$ gilt. Für einen Wert von ξ ergeben sich 2 durch das Vorzeichen verschiedene Werte von η. Die so definierten Punkte $(\xi_0, \pm\eta_0)$ liegen auf je einer der beiden Geraden, in die [3] zerfällt.

Mit $z = u,\ \xi - \xi_0 = v$ läßt sich $\eta \pm \eta_0$ darstellen in der Form $\eta = \pm\eta_0 + \mathfrak{P}(u, v)$. Wir erhalten somit für einen bestimmten Wert ξ_0 aus I

$$\text{I}_2\colon\ x = u(\xi_0 + v),\ y = u(+\eta_0 + \mathfrak{P}),\ z = u,$$

$$\text{I}_3\colon\ x = u(\xi_0 + v),\ y = u(-\eta_0 + \mathfrak{P}),\ z = u.$$

3^0. Für die unendlich fernen Punkte von [3] also $\xi = \infty$, $\eta = \infty$ werden durch die Beziehungen

$$\xi' = \frac{1}{\xi},\ \frac{\eta}{\xi} = \eta'$$

neue Größen ξ', η' eingeführt und aus I wird:

$$\text{II}\colon\ z = \xi' x,\ y = \eta' x.$$

Es wird also hier:

$$\Phi' \equiv \eta'^2 - 1 + x\{\varphi(\xi', \eta') + \cdots\} = 0.$$

Für $x = 0$ folgt $\eta' = \pm 1$.

Setzen wir $x = u$, $\xi' = v$, so läßt sich finden:

$$\eta' = \pm 1 + u\,\mathfrak{P}(u, v).$$

Und daraus:

$$\text{II}_1\colon\ x = u,\ y = u(\ \ 1 + u\,\mathfrak{P}),\ z = uv,$$
$$\text{II}_2\colon\ x = u,\ y = u(-1 + u\,\mathfrak{P}),\ z = uv.$$

Wir setzen jetzt:

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = x : y : z : 1,$$

und bestimmen wieder die $\mathfrak{A}_i'$. Dabei wollen wir die Ableitung nach u mit dem Index 1 und die nach v mit 2 bezeichnen. Dann wird:

I_1: $\mathfrak{A}_i' : (u+v)E + (uv), -(u-v)E + (uv), (uv), (u^2v^2), \mathfrak{R} = uvE,$

I_2: $\mathfrak{A}_i' : -\mathfrak{P}_2, 1, \text{const}, u^2\mathfrak{P}_1, \mathfrak{R} = u,$

$\text{II}_{1,2}$: $\mathfrak{A}_i' : \pm 1 + (u), -1, u\,\mathfrak{P}_2, (u^2), \mathfrak{R} = u,$

$$i = 1, \ldots 4.$$

Primteiler:

An der Stelle I_1 treten die Primteiler $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ mit u und v als zugeordneten Funktionen auf. Für

$$\mathfrak{B}_1 = 0 \text{ ist } \xi + \eta = \frac{x+y}{z} = 0,$$

$$\mathfrak{B}_2 = 0 \text{ ist } \xi - \eta = \frac{x-y}{z} = 0.$$

An der Stelle I_2 wird für $u = 0 : \eta - \xi = 0$, also ist u hier die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{B}_2$, da beidemal der Körper (xyz) in denselben Körper übergeht. Ebenso ist u an der Stelle I_3 die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{B}_1$. Entsprechend ergibt sich bei II_1 u als zugeordnete Funktion von $\mathfrak{B}_2$, und bei II_2 v von $\mathfrak{B}_1$.

Wir haben also die Übersicht über die Primteiler und ihre zugeordneten Funktionen:

	I_1	I_2	I_3	II_1	II_2
$\mathfrak{B}_1$	u		u		u
$\mathfrak{B}_2$	v	u		u	

Die Schnittpunktzahlen:

1^0. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, 2$, denn die $\mathfrak{B}_\varkappa$ definieren Punktkurven, da für $\mathfrak{B}_\varkappa = 0$ auch $A_i = 0$ ist, $i = 1, \ldots 3$, $\varkappa = 1, 2$.

2^0. $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_\alpha) = 1$, $\alpha = 1, 2$. Die Stelle I_1 liefert diesen Wert.
3^0. $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = 1$, da sich die beiden Kurven bei I_1 treffen.
4^0. $(\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha) = -2$. Denn aus I_1 folgt etwa für x die Zerlegung $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{L}_0'$. Da $\mathfrak{L}_0' = (u + v) E$, so ist $(\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{L}_0') = 1$; aber es ist $(\mathfrak{L}_0, \mathfrak{B}_\alpha) = 0$. Setzen wir nun: $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{L}_0'$ mit $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ nacheinander zusammen, so erhalten wir obigen Wert.

Formeln:

1^0. Für einen beliebigen Berührungskegel ist:

[1] $$\mathfrak{A}' = \overline{\mathfrak{A}}'.$$

Eine Ebene durch die Spitze eines solchen Kegels und den biplanaren Punkt $B(0, 0, 0, 1)$ hat die Gleichung

$$\mathfrak{A} \equiv \lambda_1 \mathfrak{A}_1 + \lambda_2 \mathfrak{A}_2 + \lambda_3 \mathfrak{A}_3 = 0,$$

woraus sich $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ absondern läßt (siehe I_1), so daß

[2] $$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \overline{\mathfrak{A}}.$$

Aus [1] und [2] erhalten wir für die Klasse dieses ebenen Schnittes.

$$\bar{a} = a - 2.$$

Eine Ebene durch die singuläre Tangente $x = y = 0$ hat die Gleichung $\mathfrak{A} \equiv \lambda_1 \mathfrak{A}_1 + \lambda_2 \mathfrak{A}_2 = 0$, wobei wieder

[3] $$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \overline{\mathfrak{A}}$$

wird. Die Klasse dieses ebenen Schnittes wird bestimmt durch einen Berührungskegel mit der Spitze in einem Punkt $T(0, 0, \alpha_3, \alpha_4)$ der singulären Tangente, deren Gleichung also lautet: $\mathfrak{A}' \equiv \alpha_3 \mathfrak{A}_3' + \alpha_4 \mathfrak{A}_4' = 0$, woraus sich (siehe I_1) $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ absondern läßt:

[4] $$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \overline{\mathfrak{A}}'.$$

Und wir erhalten für die Klasse dieses ebenen Schnittes aus [3] und [4]:

$$\bar{a} = a - 4.$$

2^0. Liegt die Spitze des Berührungskegels in B, so lautet die Gleichung:

[5] $$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}_1^2 \mathfrak{B}_2^2 \overline{\mathfrak{A}}'.$$

Eine Ebene durch B war durch [2] gegeben. Damit folgt aus [2] und [5] für $\bar{a}$:

$$\bar{a} = a - 6.$$

$\bar{n}'$ ergibt sich aus [5] durch Zusammensetzen mit einem beliebigen Berührungskegel $\mathfrak{A}'$ zu

$$\bar{n}' = n' - 4 .$$

3°. Für einen Kegel mit der Spitze auf der singulären Tangente galt die Gleichung [4]. Eine Ebene durch diesen Punkt ist $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$, so daß wir erhalten:

$$\bar{a} = a ,$$

und für $\bar{n}'$ durch Zusammensetzen mit einem beliebigen $\mathfrak{A}'$:

$$\bar{n}' = n' - 2 .$$

II. Kapitel.

Die Fläche F mit einem konischen Punkt.

§ 1.

Die Stellen.

Der konische Punkt liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Die Gleichung der Fläche hat dann die Form:

$$F \equiv f + f_1 + \cdots = 0 ,$$

wobei die f_i homogene, ganze rationale Funktionen seien. Der Grad von f sei μ.

Um x, y, z in der Umgebung des Nullpunktes durch Hilfsgrößen darzustellen, setzen wir:

$$x = \xi x, \quad y = z\eta .$$

Dadurch wird:

$$F \equiv z^{\mu} \Phi(\xi, \eta, z) ,$$

wobei

$$\Phi = \varphi(\xi, \eta) + z\,\varphi_1(\xi, \eta) + \cdots .$$

Die Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ definiert eine Kurve der Ordnung μ, die Klasse sei ν. Wir nehmen ferner an, die Kurve φ habe ϑ Doppelpunkte und ζ Rückkehrpunkte. Weitere Besonderheiten sollen nicht vorhanden sein. Insbesondere soll φ_1 nicht in den Doppel- und Rückkehrpunkten von $\varphi = 0$ verschwinden. Uns interessieren nur kleine Werte von x, y, z, also von ξ, η nur Werte, die nahe bei der Kurve φ liegen. Wir können annehmen, daß die unendlich fernen Punkte der Kurve φ keine Besonderheiten haben, so daß wir auf sie nicht einzugehen brauchen.

Es sei nun (ξ_0, η_0) ein Punkt der Kurve φ. Dann haben wir die Fälle:

I. Es sei $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} \neq 0$ für (ξ_0, η_0).

Setzen wir $z = u$, $\xi - \xi_0 = v$, so wird $\eta - \eta_0 = \mathfrak{P}^{(1)}(u, v)$, und damit:

$$x = (\xi_0 + v)\, u, \quad y = (\eta_0 + \mathfrak{P}^{(1)})\, u, \quad z = u.$$

II. Es sei $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0$, aber $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} \neq 0$ für (ξ_0, η_0).

Setzen wir $z = u$, $\eta - \eta_0 = v$, so wird $\xi - \xi_0 = \mathfrak{P}^{(2)}(u, v)$, und damit

$$x = (\xi_0 + \mathfrak{P}^{(2)})\, u, \quad y = (\eta_0 + v)\, u, \quad z = u.$$

III. Es sei (ξ_i, η_i) einer der ϑ Doppelpunkte von φ.

Dann ist:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)_i = 0 \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)_i = 0 \qquad i = 1, \ldots \vartheta$$

Setzen wir

$$\xi - \xi_i = u, \quad \eta - \eta_i = v,$$

so wird

$$\varphi = a u^2 + 2 b u v + c v^2 + (3), \quad b^2 - a c \neq 0$$

und

$$z = \mathfrak{P}^{(3)} = a u^2 + 2 b u v + c v^2 + (3),$$

und damit

$$x = (\xi_i + u)\, \mathfrak{P}^{(3)}, \quad y = (\eta_i + v) \mathfrak{P}^{(3)}, \quad z = \mathfrak{P}^{(3)}.$$

IV. Es sei $(\xi_\varkappa, \eta_\varkappa)$ einer der ζ Rückkehrpunkte von φ. Dann ist

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)_\varkappa = 0 \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)_\varkappa = 0, \qquad \varkappa = 1, \ldots \zeta.$$

Setzen wir $\xi - \xi_\varkappa = u$, $\eta - \eta_\varkappa = v$, so beginnt φ wieder mit Gliedern 2. Dimension, aber es ist $b^2 - a c = 0$, so daß wir setzen können

$$\varphi = (a u + b v)^2 + (3)$$

und somit z in der Form:

$$z = \mathfrak{P}^{(4)} = (a u + b v)^2 + (3)$$

und dann

$$x = (\xi_\varkappa + u) \mathfrak{P}^{(4)}, \quad y = (\eta_\varkappa + v)\, \mathfrak{P}^{(4)}, \quad z = \mathfrak{P}^{(4)}.$$

An den einzelnen Stellen setzen wir wieder:

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = x : y : z : 1.$$

Die Ableitung nach u bezeichnen wir mit dem Index 1 und die nach v durch 2, dann lautet das Ergebnis einer längeren Rechnung, die genau so durchgeführt wird wie in den bisherigen Fällen:

I. $\mathfrak{A}_i' : -\mathfrak{P}_2^{(1)}, 1, \text{const}, \quad u^2\mathfrak{P}_1^{(1)}; \quad \mathfrak{R} = u$

II. $\mathfrak{A}_i' : -1, \mathfrak{P}_2^{(2)}, \text{const}, -u^2\mathfrak{P}_1^{(2)}; \quad \mathfrak{R} = u$

III. $A_i' : -\mathfrak{P}_1^{(3)}, -\mathfrak{P}_2^{(3)}, \xi_i + \eta_i + \mathfrak{P}^{(3)} + u\mathfrak{P}_1^{(3)} + v\mathfrak{P}_2^{(3)}, -\mathfrak{P}^{(3)2};$

$$R = \mathfrak{P}, \quad i = 1, \ldots 4.$$

Wir transformieren:

$$\text{III}_1: \; u = u_1, \; v = u_1 v_1; \quad \text{III}_2: \; u = u_1 v_1, \; v = u_1.$$

Das ergibt:

$$\mathfrak{P}^{(3)} = u_1^2 \mathfrak{P}^{(31)}, \quad \mathfrak{P}^{(31)} = a + 2bv_1 + cv_1^2 + (u_1).$$

III_1: $A_i : u_1^2(\xi_i + u_1)\mathfrak{P}^{(31)}, \; u_1^2(\eta_i + u_1 v_1)\mathfrak{P}^{(31)}, \; u_1^2\mathfrak{P}^{(31)}, \; 1;$

$\mathfrak{A}_i' : 2(a + bv_1) + (u_1), \; 2(b + cv_1) + (u_1), \; \text{const} + (u_1) + (v_1) + (u_1 v_1), \; (u_1^3); \quad \mathfrak{R} = u_1^4 \mathfrak{P}^{(31)}.$

III_2: $\mathfrak{P} = u_1^2 \mathfrak{P}^{(32)}, \; \mathfrak{P}^{(32)} = av_1^2 + 2bv_1 + c + (u_1).$

$A_i : u_1^2(\xi_i + u_1 v_1)\mathfrak{P}^{(32)}, \; u_1^2(\eta_i + u_1)\mathfrak{P}^{(32)}, \; u_1^2\mathfrak{P}^{(32)}, \; 1,$

$\mathfrak{A}_i' : 2(av + b) + (u_1), \; 2(bv + c) + (u_1), \; \text{const} + (u_1) + (v_1) + (u_1 v_1), \; (u_1^3), \quad \mathfrak{R} = u_1^4 \mathfrak{P}^{(32)}.$

IV. Hier ist $\mathfrak{P}^{(4)} = (a + bv)^2 + a_1 u^3 + a_2 u^2 v + \cdots,$

$\mathfrak{A}_i' : 2a(a + bv) + (2), \; 2b(a + bv) + (2), \; -2(a + bv)(a\xi_x + b\eta_x) + (2), \; (au + bv)^4 + (5); \; \mathfrak{R} = -\mathfrak{P}^{(4)}.$

Wir transformieren:

$$\text{IV}_1: \; u = u_1, \; v = u_1 v_1, \quad \text{IV}_2: \; u = u_1 v_1, \; v = u_1$$

für kleine Werte von $|v_1|$.

Es genügt für uns IV_1 mit:

$$\mathfrak{P}^{(4)} = u_1^2 \mathfrak{P}^{(41)}, \; \mathfrak{P}^{(41)} = (a + bv_1)^2 + u_1\{a_1 + \cdots\} + \cdots;$$

IV_1: $A_i : u_1^2(\xi_x + u_1)\mathfrak{P}^{(41)}, \; u_1^2(\eta_x + u_1 v_1)\mathfrak{P}^{(41)}, \; u_1^2\mathfrak{P}^{(41)}, \; 1.$

$A_i' : -2a(a + bv_1) - 3a_1 u_1 + u_1 v_1; \quad 2b(a + bv_1) + a_2 u_1 + (u_1 v_1),$

$\text{const}(a + bv_1) + cu_1 + (u_1 v_1), \; u_1^3\{(a + bv_1)^2 + (u_1)\}^2;$

$\mathfrak{R} = u_1^4 \mathfrak{P}^{(41)}.$

Als besondere Stelle haben wir jetzt $u_1 = 0$, $a + bv_1 = 0$ zu betrachten. Wir setzen $a + bv_1 = v_1'$ und transformieren weiter:

IV_{11}: $u_1 = u_2$, $v_1' = u_2 v_2$, IV_{12}: $u_1 = u_2 v_2$, $v_1' = u_2$,
für kleine Werte $|u_2|$.

IV_{11}: $\mathfrak{P}^{(4)} = u_2^{\,3}\mathfrak{P}^{(411)}$.

$$A_i : u_2^{\,3}(\xi_\varkappa + u_2)\mathfrak{P}^{(411)},\ u_2^{\,3}\left(\eta_\varkappa + u_2\frac{u_2 v_2 - a}{b}\right)\mathfrak{P}^{(411)},\ u_2^{\,3}\mathfrak{P}^{(411)},\ 1.$$

$\mathfrak{A}_i'$: const $+ (u_2) + (v_2) + (u_2 v_2)$, $i = 1, \ldots 3$; $\mathfrak{A}_4' = (u_2^{\,4})$;
$\mathfrak{R} = u_2^{\,7}\mathfrak{P}^{(41)}$.

IV_{12}: $\mathfrak{P}^{(4)} = u_2^{\,2} v_2^{\,2}\mathfrak{P}^{(412)}$.

$$A_i : u_2^{\,2} v_2^{\,2}(\xi_\varkappa + u_2 v_2)\mathfrak{P}^{(412)},\ u_2^{\,3} v_2^{\,2}\left(\eta_\varkappa + u_2 v_2\frac{u_2 - a}{b}\right)\mathfrak{P}^{(412)},$$

$$u_2^{\,3} v_2^{\,2}\mathfrak{P}^{(412)},\ 1;$$

$\mathfrak{A}_i'$: const $+ (u_2) + (v_2) + (u_2 v_2)$; $i = 1, \ldots 3$;
$\mathfrak{A}_4' = (u_2^{\,4} v_2^{\,3})$;
$\mathfrak{R} = u_2^{\,7} v_2^{\,4}\mathfrak{P}^{(412)}$.

§ 2.
Die Primteiler.

1^0. $\mathfrak{V}_0$. An allen Stellen tritt in den A_i und in $\mathfrak{R}$ ein Primteiler in der ersten Potenz auf. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{V}_0$. Seine zugeordneten Funktionen sind der Tabelle unten zu entnehmen.

2^0. $\mathfrak{V}_i$, $i = 1, \ldots \vartheta$. An den Stellen III_1 und III_2 tritt der Primteiler $\mathfrak{V}_i$ auf mit der zugeordneten Funktion u_1. Er gehört zu den ϑ Doppelpunkten.

3^0. $\mathfrak{W}_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots \zeta$ tritt an den Stellen IV_1 und IV_{12} auf. Für $u_1 = 0$ (IV_1) und $v_2 = 0$ (IV_{12}) geht der Körper $(x\,y\,z)$ beidemal in denselben Körper über, also sind u_1 und v_2 die zugeordneten Funktionen desselben Primteilers $\mathfrak{W}_\varkappa$, der zu den ζ Rückkehrpunkten gehört.

4^0. $\mathfrak{U}_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots \zeta$ tritt an den Stellen IV_{11} und IV_{12} auf und hat dort als zugeordnete Funktion beidemal u_2. Damit haben wir die Übersicht über die Primteiler und ihre zugeordneten Funktionen:

	I	II	III_1	III_2	IV_1	IV_{11}	IV_{12}
$\mathfrak{V}_0$	u	u	$\mathfrak{P}^{(31)}$	$\mathfrak{P}^{(32)}$	$\mathfrak{P}^{(41)}$	$\mathfrak{P}^{(411)}$	$\mathfrak{P}^{(412)}$
$\mathfrak{V}_i$			u_1	u_1			
$\mathfrak{W}_\varkappa$					u_1		v_2
$\mathfrak{U}_\varkappa$						u_2	u_2

§ 3.

Die Divisoren A_i und $\mathfrak{R}$.

Zusammenfassend haben diese Größen (vergl. III und IV_{12}) folgende Gestalt:

$$A_i = \mathfrak{B}_0 \prod_{i=1}^{\vartheta} \mathfrak{B}_i^{\,2} \prod_{\varkappa=1}^{\zeta} \mathfrak{W}_\varkappa^{\,2} \prod_{\varkappa=1}^{\zeta} \mathfrak{U}_\varkappa^{\,3} \mathfrak{A}_i,$$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{B}_0 \prod_{i=1}^{\eta} \mathfrak{B}_i^{\,4} \prod_{\varkappa=1}^{\zeta} \mathfrak{W}_\varkappa^{\,4} \prod_{\varkappa=1}^{\zeta} \mathfrak{U}_\varkappa^{\,7} \mathfrak{R}^*,$$

$\mathfrak{R}^*$ bedeutet hier die eigentliche Rückkehrkurve.

§ 4.

Der Divisor $\mathfrak{D}_0$.

Wir hatten die Gleichung der Fläche in der Form

$$F = z^\mu \Phi, \text{ wobei } \Phi = \varphi(\xi, \eta) + x_3 \varphi_1(\xi, \eta) + \cdots .$$

Nach x abgeleitet:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = z^{\mu-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = x_3{}^{\mu-1} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + x_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \cdots \right\}.$$

Andrerseits ist aber

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mathfrak{R}^3 \mathfrak{D}_0 \mathfrak{A}_1'.$$

Wir haben also zur Berechnung von $\mathfrak{D}_0$ an den einzelnen Stellen in die Formel

$$\mathfrak{R}^3 \mathfrak{D}_0 \mathfrak{A}_1' = x_3{}^{\mu-1} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + x_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \cdots \right\}$$

die Entwicklungen für die x_i einzusetzen. Dabei kommt es uns nur auf die Primteiler an, die in $\mathfrak{D}_0$ enthalten sind. Bei I und II ergibt sich

$$\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{B}_0{}^{\mu-4} E,$$

wobei E eine Einheit bedeutet. An den Stellen III wird weiter

$$\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{B}_0{}^{\mu-4} \mathfrak{B}_i{}^{2\mu-13} E.$$

Bei IV wird schließlich

$$\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{B}_0{}^{\mu-4} \mathfrak{U}_x{}^{3\mu-22} \mathfrak{W}_x{}^{2\mu-13} \cdot E.$$

Fassen wir das Ergebnis zusammen, so haben wir für $\mathfrak{D}_0$ folgende Zerlegung:

$$\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{V}_0^{u-4} \prod_{i=1}^{\vartheta} \mathfrak{V}_i^{2u-13} \prod_{x=1}^{\zeta} \mathfrak{W}_x^{2u-13} \prod_{x=1}^{\zeta} \mathfrak{U}_x^{3u-22} \mathfrak{D}_0^*,$$

wobei $\mathfrak{D}_0^*$ die eigentliche Doppelkurve darstellt.

§ 5.

Schnittpunktzahlen.

1^0. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}_0)$; $(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}_i)$ usw. Aus der Darstellung der A_i (§ 3) ersehen wir: setzen wir einen der Primteiler gleich Null, so wird $A_1 = A_2 = A_3 = 0$. Die Primteiler definieren also Punktkurven auf der Fläche. Also sind die gesuchten Schnittpunktzahlen gleich Null.

2^0. $(\mathfrak{A}', \mathfrak{V}_0)$. An der Stelle I war $\xi = \xi_0 + v$, $z = u$, und η wurde als Potenzreihe $\mathfrak{P}^{(1)}$ berechnet aus

$$[1] \qquad \varphi(\xi, \eta) + u\,\varphi_1(\xi, \eta) + \cdots = 0.$$

Das möge ergeben

$$[2] \qquad \eta = \bar{\eta} + u\,\overline{\mathfrak{P}}(u, v).$$

Es ist dann

$$\mathfrak{P} = \bar{\eta} + u\,\overline{\mathfrak{P}}(u, v).$$

Setzen wir dann in [2] $u = 0$, so wird $\eta = \bar{\eta}$, andererseits geht [1] dabei über in $\varphi(\xi, \bar{\eta}) = 0$. Daraus folgt, es muß $\bar{\eta}$ eine Lösung von φ sein, also $\varphi(\xi, \bar{\eta}) = 0$. Um $(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{A}')$ zu bestimmen, nehmen wir $\mathfrak{A}_1'$. Es wird dann wegen [3] und $\xi = v + \xi_0$

$$-\mathfrak{A}_1' = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} + u \frac{\partial \overline{\mathfrak{P}}}{\partial v}.$$

Für $\mathfrak{V}_0 = 0$ d. h. $u = 0$ wird

$$\mathfrak{A}_1' = -\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} = +\frac{\partial \varphi / \partial \xi}{\partial \varphi / \partial \eta}.$$

Nach Vor. ist $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} \neq 0$. $\mathfrak{V}_0$ und $\mathfrak{A}'$ können also nur Schnittpunkte haben, wenn $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$. Das tritt ein für die Stellen der Kurve φ, in denen die Tangente parallel zur ξ-Achse verläuft. Die Anzahl dieser Stellen ist gleich der Klasse ν der Kurve φ. Also ist

$$(\mathfrak{A}', \mathfrak{V}_0) = \nu.$$

3^0. $(\mathfrak{A}', \mathfrak{V}_i)$. Wählen wir für die Stelle III $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_1' = 2(a + bv_1) + (u_1)$, so ergibt sich daraus eine Lösung für $\mathfrak{V}_i = u = 0$; also $(\mathfrak{A}', \mathfrak{V}_i) = 1$.

4^0. $(\mathfrak{A}', \mathfrak{W}_x)$. An der Stelle IV_1 schneiden sich die beiden Kurven nicht, da es sich hier nicht um die Stelle $v_1 = -\frac{b}{a}$ handelt, dasselbe gilt für IV_{11}, wo es sich um nur kleine Werte von u_2 handelt. In beiden Fällen wird für $\mathfrak{W}_x = 0$: $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_1' = \text{const.}$

5^0. $(\mathfrak{A}', \mathfrak{U}_x)$. An den Stellen IV_{11} und IV_{12} ergibt sich für $\mathfrak{U}_x = u_2 = 0$ aus $\mathfrak{A}_1'$ je ein Wert für v_2 (beliebig), wodurch offenbar derselbe Schnittpunkt definiert wird, also $(\mathfrak{A}', \mathfrak{U}_x) = 1$.

6^0. Außerdem führen wir hier noch einmal die üblichen Bezeichnungen an:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_0) = 2b_0, \quad (\mathfrak{A}', \mathfrak{D}_0) = \varrho_0; \quad (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}) = c, \quad (\mathfrak{A}', \mathfrak{R}) = \sigma.$$

Übersicht:

	$\mathfrak{V}_0$	$\mathfrak{V}_i$	$\mathfrak{W}_x$	$\mathfrak{U}_x$
$\mathfrak{A}$	0	0	0	0
$\mathfrak{A}'$	ν	1	0	1

§ 6.
Formeln.

Wir leiten jetzt Formeln für eine Fläche mit einem konischen Punkt her, und zwar je eine Formel für

I. $a(n-2)$,

II. $a(n-2)(n-3)$,

III. die Klasse n',

IV. das Geschlecht p einer Berührungskurve (vgl. Lit.-Verz. Nr. 2, VII § 54 Nr. 3).

Dazu gehen wir aus von den folgenden Äquivalenzen (vgl. Lit.-Verz. Nr. 2, II § 21 (I) und (II))

[1] $$\mathfrak{R}^3 \mathfrak{D}_0 \mathfrak{A}' \sim \mathfrak{A}^{n-1},$$

[2] $$\mathfrak{R}^8 \mathfrak{D}_0{}^3 \mathfrak{J} \sim \mathfrak{A}^{3n-4}.$$

Dividiert man [2] durch die 3. Potenz von [1], so erhält man

[3] $$\mathfrak{R}\mathfrak{A}'^3 \sim \mathfrak{J}\mathfrak{A}.$$

Diesen Wert setzen wir in die mit $\mathfrak{A}'^2$ multiplizierte Äquivalenz [1], das ergibt

$$\mathfrak{R}^2 \mathfrak{D}_0 \mathfrak{F} \sim \mathfrak{A}^{n-2} \mathfrak{A}'^2$$

oder

[4] $$\mathfrak{A}^{n-2} \sim \mathfrak{R}^2 \mathfrak{D}_0 \mathfrak{F} \mathfrak{A}'^{-2}.$$

Die Formel I.

Aus [4] folgt unter der Voraussetzung, daß der Berührungskegel eine allgemeine Lage hat, durch Zusammensetzen mit $\mathfrak{A}'$ die Salmonsche Gleichung

$$\text{I.} \quad (n-2)\,a = \varrho_0 + 2\,\sigma + \varkappa.$$

Dabei versteht man unter $\varkappa$ den Ausdruck $\varkappa = (\mathfrak{A}', \mathfrak{F}\mathfrak{A}'^{-2})$, und das ist gleich der Anzahl der stationären Kanten des Berührungskegels.

Wir bestimmen jetzt den Einfluß des konischen Punktes auf obige Formel. Dazu gehen wir von der ursprünglichen Gleichung

$$(n-2)\,a = (\mathfrak{A}', \mathfrak{R}^2 \mathfrak{D}_0) + \varkappa$$

aus. $\varkappa$ bleibt ungeändert, da $\mathfrak{F}$ nicht die eigentliche Inflexionskurve, nennen wir diese $\mathfrak{F}_0$, bedeutet, sondern $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}_\mathfrak{F} \mathfrak{F}_0$, wobei in $\mathfrak{B}_\mathfrak{F}$ die in $\mathfrak{F}$ enthaltenen Primteiler zusammengefaßt seien. Da nun (vgl. § 3, 4)

$$\mathfrak{R}^2 \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{B}_0{}^{\mu-2} \prod_{i=1}^{\vartheta} \mathfrak{B}_i{}^{2\mu-5} \prod_{\varkappa=1}^{\zeta} \mathfrak{W}_\varkappa{}^{2\mu-5} \prod_{\varkappa=1}^{\zeta} {}^{3\mu-8}\, \mathfrak{R}^{*2} \mathfrak{D}_0{}^*,$$

so erhalten wir:

$$(n-2)\,a = (\mu-2)\,(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_0) + \vartheta\,(2\mu-5)\,(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_i) + \zeta\,(2\mu-5)\,(\mathfrak{A}', \mathfrak{W}_\varkappa)$$
$$+ \zeta\,(3\mu-8)\,(\mathfrak{A}', \mathfrak{U}_\varkappa) + 2\,(\mathfrak{A}', \mathfrak{R}^*) + (\mathfrak{A}', \mathfrak{D}_0{}^*) + \varkappa$$

oder unter Benutzung von § 5 und $(\mathfrak{A}', \mathfrak{R}^*) = \sigma$, $(\mathfrak{A}', \mathfrak{D}_0{}^*) = \varrho_0$ und bei passender Zusammenfassung:

$$\text{I a.} \quad (n-2)\,a = \varkappa + \varrho_0 + 2\,\sigma + \{(\nu + 2\,\vartheta + 3\,\zeta)\,(\mu-2) - \vartheta - 2\,\zeta\}.$$

Die Formel II.

Wir setzen [1] § 6 nacheinander mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ zusammen:

[5] $$3\,c + 2\,b_0 + a = (n-1)\,n,$$

[6] $$3\,\sigma + \varrho_0 + n' = (n-1)\,a.$$

[5] mit a und [6] mit (-2) multipliziert und dann beide addiert ergibt:

[7] $$(n-1)\,(n-2)\,a = 2\,a\,b_0 + 3\,a\,c + a^2 - 6\,\sigma - 2\,\varrho_0 - 2\,n'.$$

Dazu nehmen wir die Plückersche Formel, die die Zahl δ der Doppelkanten eines allgemeinen Berührungskegels angibt, die wir so schreiben:

[8] $$0 = 2\,\delta - a^2 + 3\,n + n'.$$

[3] § 6 mit $\mathfrak{A}'$ zusammengesetzt, ergibt unter Beachtung des Ausdruckes für $\varkappa$

[9] $$0 = -\varkappa + n' + \sigma - a.$$

Setzen wir [4] mit $\mathfrak{A}'$ zusammen und multiplizieren dann mit (-2), so erhalten wir:

[10] $$-2(n-2)a = -2\varrho_0 - 4\sigma - 2\varkappa.$$

Durch Summation der Gleichungen [7] bis [10] erhalten wir die gesuchte Formel:

II a: $$a(n-2)(n-3) = 2\delta + 2ab_0 + 3ac - 9\sigma - 4\varrho_0.$$

Wir bestimmen wieder den Einfluß des konischen Punktes auf diese Formel. Dazu schreiben wir sie in der Form:

$$a(n-2)(n-3) = 2\delta + a(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_0) + 3a(\mathfrak{A}, \mathfrak{R}) - 9(\mathfrak{A}', \mathfrak{R}) - 4(\mathfrak{A}', \mathfrak{D}_0).$$

Da, wie wir oben sahen, die in $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{R}$ enthaltenen Primteiler Punktkurven definieren, so wird:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_0) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_0^*) = 2b_0, \quad (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}^*) = c.$$

Unter Einsetzen der Werte von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}_0$ und $(\mathfrak{A}', \mathfrak{D}_0^*) = \varrho_0$, $(\mathfrak{A}', \mathfrak{R}^*) = \sigma$, $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_\varkappa) = 0$ wird

$$\begin{aligned} a(n-2)(n-3) = {} & 2\delta + 2ab_0 + 3ac - 9\sigma - 4\varrho_0 \\ & - 9\{(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_0) + 4\vartheta(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_i) + 7\zeta(\mathfrak{A}', \mathfrak{U}_\varkappa)\} \\ & - 4\{(\mu-4)(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_0) + \vartheta(2\mu-13)(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_i) \\ & \qquad + \zeta(3\mu-22)(\mathfrak{A}', \mathfrak{U}_\varkappa)\}, \end{aligned}$$

wofür sich unter Benutzung der Schnittpunktzahlen § 5 und bei passender Zusammenfassung schreiben läßt:

II b: $$\begin{aligned} a(n-2)(n-3) = {} & 2\delta + 2ab_0 + 3ac - 9\sigma - 4\varrho_0 \\ & + (\nu + 2\vartheta + 3\zeta)(-4\mu + 7) + 2\vartheta + 4\zeta. \end{aligned}$$

Die Formel III.

Aus der Äquivalenz [1] folgt:

$$\mathfrak{A}' \sim \mathfrak{A}^{n-1}\mathfrak{D}_0^{-1}\mathfrak{R}^{-3},$$

und damit

$$n' = (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}') = a(n-1) - \varrho_0 - 3\sigma.$$

Dieselbe Äquivalenz im $\mathfrak{A}$ zusammengesetzt:

$$a = (n-1)n - 2b_0 - 3c.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$n' = (n-1)^2 \cdot n - (n-1)(2b_0 + 3c) - \varrho_0 - 3\sigma.$$

Die durch Singularitäten hervorgerufene Verminderung der Klasse wird also gegeben durch

$$\delta_1 = (n-1)(2b_0 + 3c) + \varrho_0 + 3\sigma.$$

Der konische Punkt hat offenbar nur Einfluß auf ϱ_0 und σ. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen wird dann:

$$\begin{aligned}\delta_1 = {} & (n-1)(2b_0 + 3c) + \varrho_0 + 3\sigma \\ & + (\mu - 4)(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_0) + \vartheta(2\mu - 13)(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_i) + \zeta(2\mu - 13)(\mathfrak{A}', \mathfrak{W}_x) \\ & + \zeta(3\mu - 22)(\mathfrak{A}', \mathfrak{U}_x) + 3(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_0) + 12\vartheta(\mathfrak{A}', \mathfrak{W}_x) \\ & + 21\zeta(\mathfrak{A}', \mathfrak{U}_x).\end{aligned}$$

Oder nach S. 18 und passend zusammengefaßt:

$$\begin{aligned}\text{III.}\quad n' = {} & (n-1)^2 n - (n-1)(2b_0 + 3c) - \varrho_0 - 3\sigma \\ & - \{(\nu + 2\vartheta + 3\zeta)(\mu - 1) + \vartheta + 2\zeta\}.\end{aligned}$$

Die Formel IV.

Für das Geschlecht p' einer Berührungskurve ohne besondere Lage gilt für den Fall, daß die Fläche keine Besonderheiten hat:

$$[1] \qquad 2p' - 2 = n(n-1)(2n-5).$$

Hat die Fläche Besonderheiten, so wird obiger Ausdruck vermindert um

$$\delta_2 = (2n-5)(2b_0 + 3c) + 5\sigma + 2\varrho_0.$$

Für den konischen Punkt wird dann:

$$\begin{aligned}\delta_2 = {} & (2n-5)(2b_0 + 3c) + 5\sigma + 2\varrho_0 \\ & + 5\{(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_0) + 4\vartheta(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_i) + 4\zeta(\mathfrak{A}', \mathfrak{W}_x) + 7\zeta(\mathfrak{A}', \mathfrak{U}_x)\} \\ & + 2\{(\mu - 4)(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_0) + \vartheta(2\mu - 13)(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}_i) + \zeta(2\mu - 13)(\mathfrak{A}', \mathfrak{W}_x) \\ & + \zeta(3\mu - 22)(\mathfrak{A}', \mathfrak{U}_x)\},\end{aligned}$$

und daraus:

$$\begin{aligned}\text{IV.}\quad 2p' - 2 = {} & n(n-1)(2n-5) - (2n-5)(2b_0 + 3c) - 5\sigma - 2\varrho_0 \\ & - (\nu + 2\vartheta + 3\zeta)(2\mu - 3).\end{aligned}$$

Das arithmetische Geschlecht.

In zwei Fällen wollen wir jetzt noch zeigen, wie sich das arithmetische Geschlecht p_a berechnen läßt. Dazu geht man aus von einem Differential

$$d\xi = \alpha\, dx + \beta\, dy,$$

wobei α, β nicht speziell gewählte Konstanten sind. Die Formel hängt dann nur ab von der Eigentümlichkeit der Fläche, denn das Differential besitzt keine solche.

An jeder Stelle S läßt sich $d\xi$ darstellen in der Form:

$$d\xi = \mathfrak{X}(U\,du + V\,dv).$$

$\mathfrak{X}(u, v)$ ist die zugeordnete Funktion des „Divisors des Differentials $d\xi$". U, V sind gewöhnliche Potenzreihen von u, v, die nur für die betreffende Stelle von Bedeutung sind. Die Anzahl ihrer Schnittpunkte, die in eine Stelle S fallen, bezeichnen wir mit $(U, V)_S = \vartheta_s$, und erhalten daraus

[1] $$\vartheta = \sum_S \vartheta_s,$$

wobei über alle in Frage kommenden Stellen zu summieren ist.

Das arithmetische Geschlecht ist dann zu berechnen aus

[2] $$12\,(p_a + 1) = (\mathfrak{X}, \mathfrak{K}) - (\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) + \vartheta + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K});$$

$\mathfrak{K}$ ist ein Divisor der kanonischen Klasse, und es gilt

[3] $$\mathfrak{K} \sim \mathfrak{Z}\,\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2},$$

wenn $\mathfrak{Z}$ der Verzweigungsdivisor in bezug auf x, y und $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ die Nenner von x, y darstellen. Setzen wir noch

[4] $$\mathfrak{B} = \mathfrak{X}\,\mathfrak{L}^2\,\mathfrak{M}^2,$$

so ist $\mathfrak{B}$ ein ganzer Divisor, der aus dem Einfluß singulärer Punkte besteht.

§ 1.

Der Kniffpunkt.

Wir hatten als Gleichung der Fläche mit Kniffpunkt

$$z = (y - x^2)\left(1 + \sqrt{x}\right) + (y - x^2)^2$$

mit der Parameterdarstellung

$$x = u^2,\quad y = u^4 + v.$$

Die beiden Verzweigungskurven $x = 0$, $x = \infty$ wollen wir mit $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ bezeichnen, die sonst auftretenden Primteiler mit $\mathfrak{P}_i$. Wir haben hier die Stellen:

1. u, v endlich, 2. $u = \infty$, v endlich, 3. u endlich, $v = \infty$, 4. $u = \infty$, $v = \infty$. Wir lösen die Stellen so weit auf, bis x und y bestimmte Werte annehmen. Die Auflösung geschieht nach dem NOETHERschen Verfahren mit den beiden zusammengehörigen Transformationen, die immer wieder angewandt werden:

$$1.\ u = u_1,\ v = u_1 v_1;\quad 2.\ u = u_1 v_1,\ v = u_1.$$

Die Nummern sind wichtig, damit man leicht feststellen kann, welche Transformationen angewandt sind. So heißt z. B. 4 111 2, daß wir ausgegangen von der Stelle 4 und 3 mal hintereinander die Transformation 1 und dann 2 angewandt haben.

In der folgenden Übersicht finden wir das Ergebnis. Dabei sind die Stellen, die noch aufgelöst werden mußten, gleich fortgelassen. Handelt es sich um unendliche große Werte von u bzw. v, so ist stets u durch $\frac{1}{u}$, bzw. v durch $\frac{1}{v}$ ersetzt zu denken. Das spart neue Bezeichnungen (siehe Tabelle S. 24).

In $\mathfrak{Z}$ interessieren uns nur die Primteiler, so daß die etwa auftretenden Einheiten von vornherein fortgelassen sind. Rechts stehen immer die Primteiler mit ihren zugeordneten Funktionen.

Aus der Tabelle S. 24 ergibt sich

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{W}_2^{\,2} \prod_{i=1}^{8} \mathfrak{P}_i^{\,2},$$

$$\mathfrak{M} = \prod_{i=1}^{5} \mathfrak{P}_i^{\,4} \cdot \mathfrak{P}_6^{\,3} \mathfrak{P}_7^{\,2} \mathfrak{P}_8\, \mathfrak{M}^*,$$

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 \cdot \mathfrak{P}_1^{\,9} \mathfrak{P}_2^{\,8} \mathfrak{P}_3^{\,7} \mathfrak{P}_4^{\,6} \mathfrak{P}_5^{\,5} \mathfrak{P}_6^{\,4} \mathfrak{P}_7^{\,3} \mathfrak{P}_8^{\,2},$$

$$\mathfrak{B} = \prod_{i=1}^{5} \mathfrak{P}_i^{\,7} \cdot \mathfrak{P}_6^{\,6} \mathfrak{P}_7^{\,5} \mathfrak{P}_8^{\,3} \cdot \mathfrak{W}_2,$$

$$\vartheta = \sum_S \vartheta_S = 10.$$

Schnittpunktzahlen:

Aus der Tabelle entnehmen wir, an welchen Stellen Primteiler zusammentreffen; es ergibt sich:

$$(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_{k+1}) = 1,\ k = 1, \ldots 7$$

sonst $\quad (\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_l) = 0,\ k = 1, \ldots 8,\ l \neq k, k+1.$

Ferner ist

$$(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{M}) = (\mathfrak{W}_1, \mathfrak{M}^*) = 2,\ (\mathfrak{W}_2, \mathfrak{M}) = (\mathfrak{W}_2, \mathfrak{P}_8) = 1.$$

Stelle	x	y	$\mathfrak{Z}$	$\mathfrak{B}_s$	ϑ	Primteiler
1	u^2	u^4+v	u	1	0	$u=\mathfrak{W}_1$
2	$\frac{1}{u^2}$	$\frac{1+u^4v}{u^4}$	u^9	u^7	0	$u=\mathfrak{P}_1$
3	u^2	$\frac{1+u^4v}{v}$	u	1	0	$u=\mathfrak{W}_1$ $v=\mathfrak{M}^*$
[4]	$\frac{1}{u^2}$	$\frac{u^4+v}{u^4v}$	wird aufgelöst			
42	$\frac{1}{u_1^2v_1^2}$	$\frac{1+u_1^3v_1^4}{u_1^4v_1^4}$	$u_1^8v_1^9$	$u_1^7v_1^7$	1	$v_1=\mathfrak{P}_1$ $u_1=\mathfrak{P}_2$
412	$\frac{1}{u_2^2v_2^2}$	$\frac{1+u_2^2v_2^3}{u_2^4v_2^4}$	$u_2^7v_2^8$	$u_2^7v_2^7$	1	$v_2=\mathfrak{P}_2$ $u_2=\mathfrak{P}_3$
4112	$\frac{1}{u_3^2v_3^2}$	$\frac{1+u_3v_3^2}{u_3^4v_3^4}$	$u_3^6v_3^7$	$u_3^7v_3^7$	1	$v_3=\mathfrak{P}_3$ $u_3=\mathfrak{P}_4$
41111	$\frac{1}{u_4^4}$	$\frac{1+v_4}{u_4^4v_4}$	u_4^5	u_4^7	1	$u_4=\mathfrak{P}_5$
41112	$\frac{1}{u_4^2v_4^2}$	$\frac{1+v_4}{u_4^4v_4^4}$	$u_4^5v_4^6$	$u_4^7v_4^7$	1	$v_4=\mathfrak{P}_4$ $u_4=\mathfrak{P}_5$

Die Unbestimmtheitsstelle $u_4=0$, $v_4=-1$ in 41111 ($|v_4|<2$) bezeichnen wir als Stelle 5 und setzen $v_4=-1+v_4'$.

[5]	$\frac{1}{u_4^2}$	$\frac{v_4'}{u_4^4(v_4'-1)}$	wird aufgelöst			
52	$\frac{1}{u_5^2v_5^2}$	$\frac{1}{u_5^3v_5^4(u_5-1)}$	$u_5^4v_5^5$	$u_5^6v_5^7$	1	$v_5=\mathfrak{P}_5$ $u_5=\mathfrak{P}_6$
512	$\frac{1}{u_6^2v_6^2}$	$\frac{1}{u_6^2v_6^3(u_6^2v_6-1)}$	$u_6^3v_6^4$	$u_6^5v_6^6$	2	$v_6=\mathfrak{P}_6$ $u_6=\mathfrak{P}_7$
5112	$\frac{1}{u_7^2v_7^2}$	$\frac{1}{u_7v_7^2(u_7^3v_7^2-1)}$	$u_7^2v_7^3$	$u_7^3v_7^5$	1	$v_7=\mathfrak{P}_7$ $u_7=\mathfrak{P}_8$
51111	$\frac{1}{u_8^2}$	$\frac{v_8}{u_8^4v_8-1}$	u_8	u_8	0	$u_8=\mathfrak{W}_2$
51112	$\frac{1}{u_8^2v_8^2}$	$\frac{1}{v_8(u_8^4v_8^3-1)}$	$u_8v_8^2$	$u_8v_8^3$	1	$v_8=\mathfrak{P}_8$ $u_8=\mathfrak{W}_2$

Setzt man nacheinander $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_8$ und $\mathfrak{W}_2$ mit $\mathfrak{L}$ zusammen, so bekommt man wegen $(\mathfrak{L}, \mathfrak{P}_i) = 0$ die Schnittpunktzahlen $(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_k)$ und $(\mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_2)$.

Es ergibt sich:

$$(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1) = -1, \quad (\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_n) = -2, \quad k = 2, \ldots 8, \quad (\mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_2) = -1.$$

$(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_1)$ ergibt sich aus $\mathfrak{L}_0 \mathfrak{W}_1^2$ durch Zusammensetzen mit $\mathfrak{W}_1$, da $\mathfrak{L}_0 \sim \mathfrak{L}$ und $(\mathfrak{L}, \mathfrak{W}_1) = 0$, zu $(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_1) = 0$.

Der Wert von p_a.

Mit den Gleichungen [1], [3] und [4] wird aus [2], wegen $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}) = 0$ und $(\mathfrak{L}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{L}, \mathfrak{Z}) = 0$ (siehe Schnittpunktzahlen) und $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = n = 2$,

$$12\,(p_a + 1) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{Z}\,\mathfrak{B}^{-1}) + (\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}) + 2\,(\mathfrak{M}, \mathfrak{B}) - 6\,(\mathfrak{M}, \mathfrak{Z}) + 8n + \vartheta$$

mit den eben errechneten Werten ergibt sich daraus:

$$12\,(p_a + 1) = 4 - 8 + 2 - 6 \cdot 2 + 16 + 10 = 12$$

Also $p_a = 0$.

§ 2.

Der clos-Punkt.

Wir könnten jetzt in derselben Weise wie im vorigen Fall p_a berechnen. Durch die Darstellung

$$x = \varrho, \quad y = \varrho^2 + \sigma$$

$$\text{I. } \varrho = u, \quad \sigma = u v^2, \quad \text{II. } \varrho = u v^2, \quad \sigma = u$$

wird z rational, wie sich aus der Gleichung der Fläche mit clos-Punkt (S. 5, § 2) ergibt, so daß $p_a = 0$ wird, wie sich zeigen und erwarten läßt. Daß die Fläche dabei im Nullpunkt eine Singularität besitzt, hat hier gar keinen Einfluß mehr. Es handelt sich schließlich nur noch um rationale Funktionen. Was uns aber interessiert, ist der Beitrag des clos-Punktes zu p_a. Wir beschränken uns daher nur auf endliche Werte von u, v, und zwar so kleine, daß x, y nahe bei Null liegen. Wir setzen daher fest, daß für

$$\text{I: } |v| < 2 \text{ und II: } |v| \leqq \frac{1}{2} \text{ gelten soll.}$$

Es wird dann:

$$\text{I. } x = u,\ y = u(u + v^2);\ \frac{D(xy)}{D(uv)} = 2uv.$$

$$d\xi = \{\alpha + 2\beta u + \beta v^2\} du + 2\beta uv\, dv,$$

also $$\mathfrak{X} = 1,\ U = \alpha + 2\beta u + \beta v^2.\ V = 2\beta uv.$$

Aus $U = V = 0$ ergibt sich

$$1.\ u = 0,\ v = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

$$2.\ u = -\frac{\alpha}{2\beta},\ v = 0.$$

$$\text{II. } x = uv^2,\ y = u(1 + uv^4);\ \frac{D(xy)}{D(uv)} = -2uv.$$

$$d\xi = \{\alpha v^2 + \beta(1 + 2uv^4)\} du + \{2\alpha uv + 4\beta u^2 v^3\} dv,$$

also $$\mathfrak{X} = 1,\ U = \beta + \alpha v^2 + 2\beta uv^4,\ V = 2uv(\alpha + 2\beta uv^2).$$

Aus $U = V = 0$ ergibt sich:

$$u = 0,\ v = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Von II ausgehend sehen wir, daß noch Bestimmungen über die Größenverhältnisse von α, β getroffen werden müssen, so daß $|v| \leq \frac{1}{2}$ erfüllt bleibt. Wegen der Willkürlichkeit von α, β können wir festsetzen: $|\alpha| > |4\beta|$. Dann werden die Lösungen unter I zu groß, so daß sie ausscheiden. Es wird: $\vartheta = (U, V) = 2$. $u = 0$ definiert an beiden Stellen denselben Punktprimteiler $\mathfrak{V}$. $v = 0$ definiert bei I die Verzweigungskurve $\mathfrak{W}_1 : y - x^2 = 0$, bei II die Verzweigungskurve $\mathfrak{W}_2 : x = 0$. Zusammenfassend wird:

$$\mathfrak{X} = 1,\ \vartheta = 2,\ \mathfrak{R} = \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2.$$

Wenden wir jetzt die Formel [2] an, so wird wegen $\mathfrak{X} = 1$:

$$12(p_a + 1) = \vartheta + (\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) + 2\{(\mathfrak{V}, \mathfrak{W}_1) + (\mathfrak{V}, \mathfrak{W}_2) + (\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2)\} + \{(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_1) + (\mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_2)\}.$$

Die Kurven $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2$ gehen einfach durch die betrachtete Stelle und berühren sich nicht, also ist $(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2) = 1$
$\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}_1$ treffen sich bei (I). $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}_2$ bei (II), also ist

$$(\mathfrak{V}, \mathfrak{W}_1) = (\mathfrak{V}, \mathfrak{W}_2) = 1$$

Aus der Darstellung II folgt $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{V}\,\mathfrak{W}_2^{\,2}$ und daraus durch Zusammensetzen mit $\mathfrak{V}$ wegen $(\mathfrak{V}, \mathfrak{L}_0) = 0$:

$$(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) = -2\,.$$

Damit ergibt sich:

$$12\,(p_a + 1) = 6 + \{(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_1) + (\mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_2)\}\,.$$

Hier jetzt den Einfluß des clos-Punktes allein zu bestimmen, ist äußerst schwierig wegen der folgenden verschiedenen Möglichkeiten:

1⁰. Mit den Methoden des § 1 lassen sich die Schnittpunktzahlen bestimmen. Welcher Anteil entfällt davon auf den clos-Punkt? Ein Grenzübergang von einer Fläche ohne zu einer solchen mit clos-Punkt verspricht keine eindeutige Beantwortung der Frage, denn die Art des Grenzübergangs kann dabei eine Rolle spielen.

2⁰. Auch erscheint der Standpunkt berechtigt: die sowieso in $\mathfrak{R}$ enthaltenen Verzweigungskurven sind nichts für den singulären Punkt Charakteristisches. Das sind nur die Punktprimteiler, so daß nur die in den singulären Punkt fallenden Schnittpunkte der Verzweigungskurven unter sich und der Punktprimteiler mit sich selbst und mit den andern Kurven zu werten sind. Dagegen sollen die Schnittpunktzahlen der Verzweigungskurven mit sich selbst nicht dazu gerechnet werden.

Die Beantwortung dieser Fragen hängt davon ab, ob man einmal überhaupt einen singulären Punkt in dieser Weise isolieren kann, und zweitens, ob sich die Betrachtungen an algebraischen Kurven ohne weiteres auf Flächen übertragen lassen.

Schluß.

Die Formeln des I. Kapitels stimmen zum größten Teil, aber nicht restlos mit denen von Zeuthen (Lit.-Verz. Nr. 8) überein. Welches die richtigen sind, ist nicht leicht zu entscheiden, es fehlt meist bei Zeuthen ein genauer Beweis; ferner kommt es bei unserer Methode darauf an, wie man die Schnittpunktzahlen definiert.

Die Formeln I und II des II. Kap. finden wir auch bei Salmon zitiert (Lit.-Verz. Nr. 6, Art. 515 [7*] u. [10*]). Gleichungen für $b\,(n-2)\,(n-3)$ u. $c\,(n-2)\,(n-3)$ aufzustellen erscheint aussichtslos, da sich hierin die Summanden $(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_0)$ und $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ oder $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ mit den überhaupt existierenden Äquivalenzen (Lit.-Verz. Nr. 2, II. Kap. § 21, 2 u. 3) nicht fortschaffen lassen.

Literatur.

1. H. W. E. Jung: Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen (Berlin u. Leipzig 1923).
2. — Algebraische Flächen (Helwingsche Verlagsbuchhandlung).
3. — Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y = b$ (Crelles Journal Bd. 133).
4. — Zur Theorie der Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche (Crelles Journal Bd. 138).
5. — Sui gruppi di punti sopra una superficie e sulla serie di Severi, dal punto di vista della teoria dei corpi algebrici (Reale Acc. d'Italia. Memorie della classe di sc. fis. mat. e nat. Bd. IV S. 403—413).
6. Salmon-Fiedler: Analytische Geometrie des Raumes II, 3. Aufl. 1880.
7. Andreas Perl: Über die singulären Punkte der algebraischen Flächen 3. Ordnung (Dissertation, Kiel 1915).
8. G. Zeuthen: Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques (Mathem. Annalen Bd. X).

Lebenslauf.

Am 18. März 1911 wurde ich, Albrecht Hoppe, als Sohn des Pfarrers Werner Hoppe und seiner Ehefrau Anni geb. Schwartz in Sandersleben in Anhalt geboren. Ich bin evangelischen Bekenntnisses und deutscher Staatsangehörigkeit.

Da mein Vater zuerst Pfarrstellen auf dem Lande hatte, 1915 bis 1926 in Capelle bei Dessau, 1926 bis 1928 in Morl bei Halle, wurde ich zunächt von meinen Eltern unterrichtet. 1926 machte ich die Aufnahmeprüfung für Untersekunda am Stadtgymnasium in Halle und legte dort Ostern 1930 die Reifeprüfung ab. 1928 wurde mein Vater nach Halle versetzt.

Ich studierte ab Ostern 1930 Mathematik, Physik und Chemie in Halle, im S.S. 1931 in Innsbruck, dann wieder in Halle. Am 18. Januar 1934 wurde die von der naturwissenschaftlichen Fakultät zu Halle zum akademischen Wettbewerb gestellte und von mir bearbeitete Aufgabe „Die Salmonschen Formeln“ mit dem vollen Preise gekrönt. Im November 1934 ließ ich mich exmatrikulieren. Der 17. April 1935 war der Tag der mündlichen Prüfung zur Promotion. Meine Lehrer in Halle waren die Herren Professoren und Dozenten: Baer, Conrad, Hahne, Hoffmann, Jung, Kürten, Menzer, Scholder, Smekal, Utitz, Vorländer, von Wolff, Ziehen. In Innsbruck: Erismann, Kastil, Lerch, March, Schatz, Vietoris.